# 3-Variáveis aleatórias multivariadas

Se o modelo probabilístico envolver mais do que um atributo será necessário generalizar o conceito de variável aleatória passando-se de

$$\omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in \Re$$

para

$$\omega \in \Omega \quad \rightarrow \quad \left(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_k(\omega)\right) \in \Re^k$$

isto é, utiliza-se a variável aleatória $k$-dimensional $(X_1, \ldots, X_k)$.

O estudo centrar-se-á nas variáveis aleatórias bidimensionais: $k$=2

## 3.1 Variáveis aleatórias bidimensionais

- **Simplificação:** Em vez de $(X_1, X_2)$ emprega-se $(X, Y)$
- **Definição 4.1 – Variável aleatória bidimensional**

  Uma v.a. bidimensional, $(X,Y)$, é uma função com domínio $\Omega$ e com contradomínio em $\Re^2$, $(X,Y): \omega \in \Omega \quad \rightarrow \quad \big(X(\omega), Y(\omega)\big) \in \Re^2$

## 3.2 Função de distribuição conjunta

• **Definição – Função de distribuição conjunta**

Seja $(X, Y)$ uma variável aleatória bidimensional. A função real de duas variáveis reais, com domínio $\Re^2$, definida por

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x,\ Y \leq y),$$

é a função de distribuição **conjunta** de $(X, Y)$.

• **Simplificação:** Não havendo confusão, escreve-se $F(x, y)$ **em vez de** $F_{X,Y}(x, y)$

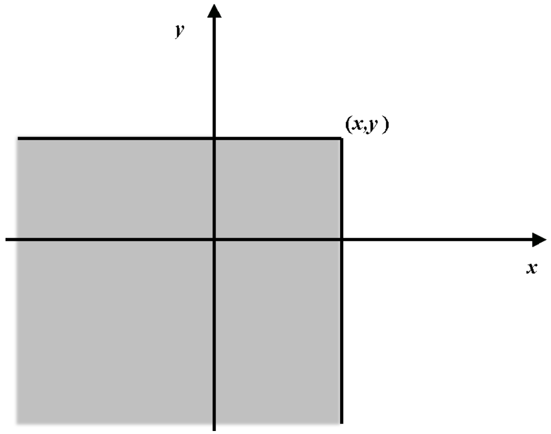



**Fig. –** Região do plano $\Re^2$ definido pelas desigualdades $X \leq x$ e $Y \leq y$.

- **Propriedades da função de distribuição**

1) $0 \le F(x, y) \le 1.$

*2)* $F$ é não decrescente, separadamente, em relação a $x$ e em relação a $y$:

$\Delta x > 0 \Rightarrow F(x, y) \le F(x + \Delta x, y)$ e $\Delta y > 0 \Rightarrow F(x, y) \le F(x, y + \Delta y)$.

3) Para qualquer função de distribuição $F\,(x, y)$,

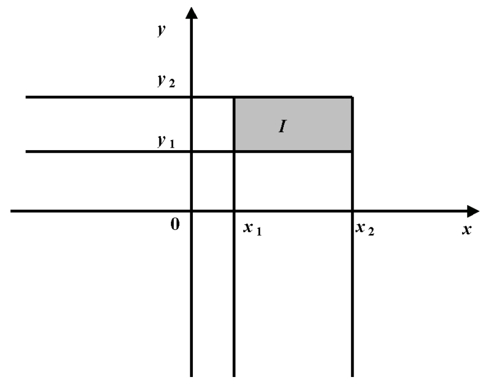
$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0, \; F(+\infty, +\infty) = 1.$$

4) Considere-se o retângulo $I$ de $\Re^2$ com vértices nos pontos,

$$(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2), \quad I = \{(x, y) : x_1 < x \le x_2,\, y_1 < y \le y_2\}.$$

Então

$$P(I) = P(x_1 < X \le x_2,\, y_1 < Y \le y_2)$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1)$$
$$+ F(x_1, y_1)$$



5)Qualquer função de distribuição $F$ é contínua à direita em relação a $x$ e em relação a $y$,

$$\lim_{s \to 0^+} F(x+s, y) = F(x^+, y) = F(x, y) \text{ e}$$
$$\lim_{s \to 0^+} F(x, y+s) = F(x, y^+) = F(x, y).$$

.

- **Exemplo -** Cálculo de probabilidades utilizando a função de distribuição

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \text{ ou } y<0 \\ 1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y} & \text{se } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \end{cases}$$

$P(2 < X \leq 3; 1 < Y \leq 4) =$ $\quad$ $P(X \leq 4) =$ $\quad$ $P(Y > 2) =$

## 3.3 Função de distribuição marginal

- **Funções de distribuição marginais -** cada variável é considerada de forma isolada

$$P(X \leq x) = P(X \leq x,\ Y < +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty) = F_X(x);$$
$$P(Y \leq y) = P(X < +\infty,\ Y \leq y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = F(+\infty, y) = F_Y(y).$$

A distribuição conjunta determina univocamente as distribuições marginais, **mas a inversa não é verdadeira**.

- **Exemplo**:

  Calcular as funções de distribuição marginais do exemplo anterior

## 3.4 Independência de variáveis aleatórias multivariadas

• **Definição – Variáveis aleatórias independentes**

Sejam $B_1$ e $B_2$ dois acontecimentos quaisquer tais que $B_1$ só envolve $X$ e $B_2$ apenas se refere a $Y$. As variáveis aleatórias $X$ e $Y$ são independentes se e só se,

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1) \times P(Y \in B_2).$$

De forma equivalente: $F(x, y) = F_X(x) \times F_Y(y)$ para todo o par $(x, y)$

• **Teorema** – Se $X$ e $Y$ são variáveis aleatórias independentes e se $\psi$ e $\varphi$ são duas funções então as variáveis aleatórias $U = \psi(X)$, $V = \varphi(Y)$ são também independentes.

# 5. Variáveis aleatórias discretas multivariadas

- **Definição – Variável aleatória bidimensional discreta**
  $(X, Y)$ é variável aleatória bidimensional discreta se e só se $X$ e $Y$ são variáveis aleatórias discretas.

  Dado $\mathrm{D} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y})\colon P(X = \mathrm{x},\ Y = \mathrm{y}) > 0\}$, tem-se $P[(X,\ Y) \in \mathrm{D}] = 1$.

- **Definição – Função probabilidade conjunta**
  Seja $(X, Y)$ uma variável aleatória bidimensional discreta. A função real de duas variáveis reais, com domínio $\Re^2$, definida por,

$$f_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

  é a função probabilidade de $(X, Y)$ ou a função probabilidade conjunta das variáveis $X$ e $Y$.

**Propriedades da função probabilidade conjunta:**

- $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$
- $\sum_{(x,y)\in D} f_{X,Y}(x, y) = 1$
- $P[(X, Y) \in B] = \sum_{(x,y)\in D\cap B} f_{X,Y}(x, y)$
- $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

$$= \sum_{s\leq x} \sum_{t\leq y} f_{X,Y}(s, t) \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty)$$

- **Definição - Função probabilidade marginal**

Considere a variável aleatória bidimensional $(X,Y)$.

Sejam

$F_X \rightarrow$ função de distribuição marginal de $X$

$D_X = \{x: P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-) > 0\}$, conjunto dos pontos de descontinuidade de $F_X$

Função probabilidade marginal de $X$: .

Facilmente se verifica que

$$f_X(x) = \begin{cases} P(X = x) = \sum_{y \in D_Y} f_{X,Y}(x, y) & x \in D_X \\ 0 & x \notin D_X \end{cases}$$

**Teorema -** As v.a. discretas $X$ e $Y$ são independentes se e só se

$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$ para todo o par $(x, y)$.

**Exemplo 3.1 -** Lançamento de dois dados. Sejam ***X***: número de pontos obtido com o primeiro dado e ***Y***: o número máximo de pontos obtido no conjunto dos dois dados. Por exemplo: se sair (1,3) tem-se $X = 1$, $Y = 3$; se sair (4,1) obtém-se $X = 4$, $Y = 4$.

**Função probabilidade bidimensional**

| $X \setminus Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $f_X(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 6/36 |
| 2 | 0 | 2/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 6/36 |
| 3 | 0 | 0 | 3/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 6/36 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 4/36 | 1/36 | 1/36 | 6/36 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5/36 | 1/36 | 6/36 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6/36 | 6/36 |
| $f_Y(y)$ | 1/36 | 3/36 | 5/36 | 7/36 | 9/36 | 11/36 | 1 |

- Funções probabilidade marginais. Por exemplo,

$$f_X(4) = P(X = 4) = f(4,4) + f(4,5) + f(4,6) = 6/36 = 1/6\,;$$

$$f_Y(5) = P(Y = 5) = f(1,5) + f(2,5) + f(3,5) + f(4,5) = 9/36 = 1/4\,.$$

- As variáveis aleatórias $X$ e $Y$ não são independentes. Por exemplo,

$$f_{X,Y}(4,5) = 1/36 \neq f_X(4)\, f_Y(5) = (6/36)\times(9/36) = 1/24.$$

- As distribuições marginais **não** definem a distribuição conjunta. Poder-se-ia definir outra distribuição conjunta através de $h(x, y) = f_X(x)\ f_Y(y)$.
- Cálculo de probabilidades:

$$P(2 < X < 5, Y > 2) =$$

$$P(X < 3) =$$

$$P(Y > 4) =$$

## 3.6 Variáveis aleatórias contínuas multivariadas

**Definição – Variável aleatória bidimensional contínua**

A variável aleatória $(X,Y)$, com função de distribuição $F_{X,Y}$, é uma variável aleatória bidimensional contínua se e só se, existe uma função real de duas variáveis reais, não negativa, $f_{X,Y}$, tal que,

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v)dudv$$

$(X,Y)$ é uma variável aleatória bidimensional contínua se e só se, $X$ e $Y$ são variáveis aleatórias contínuas.

- **Definição – Função densidade conjunta**

A função $f_{X,Y}$, introduzida na definição anterior, chama-se função densidade (de probabilidade) de $(X,Y)$ ou função densidade conjunta de $X$ e $Y$.

- **Propriedades da função densidade conjunta**

  - Propriedade 3 das funções de distribuição conjuntas, $F_{X,Y}(+\infty,+\infty)=1$. Logo
$$F_{X,Y}(+\infty,+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dxdy=1$$

  - Se $f_{X,Y}(x, y)$ for contínua no ponto $(x, y)$ então $f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$

  - Nos pontos em que não existe segunda derivada, convenciona-se $f_{X,Y}(x,y)=0$.

- Funções densidade marginais:

$f_X(x) = dF_X(x)/dx \ = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$ já que
$F_X(x) = F_{X,Y}(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,y)dydu$

$f_Y(y) = dF_Y(y)/dy \ = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$ já que
$F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,v)dxdv$

**Teorema –** As variáveis $X$ e $Y$ dizem-se independentes se e só se,

$f_{X,Y}(x,y)= f_X(x)\ f_Y(y)$ para todo o par $(x, y)$.

## 3.7 Funções de distribuição condicionais

### 3.7.1 Variáveis aleatórias discretas

**Definição - Função probabilidade condicionada**

A função probabilidade de $X$ condicionada pela realização do acontecimento $\{Y = y\}$, com $P(Y = y) > 0$, é dada por,

$$f_{X|Y=y}(x) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (y \text{ fixo})$$

De modo análogo, se pode definir a função probabilidade de $Y$ condicionada pela realização do acontecimento $\{X = x\}$, com $P(X = x) > 0$, através de,

$$f_{Y|X=x}(y) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x; Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad (x \text{ fixo})$$

- As funções probabilidade condicionadas gozam de todas as propriedades das f. probabilidade: $\sum_{x \in D_X} f_{X|Y=y}(x) = 1$ e $\sum_{y \in D_Y} f_{Y|X=x}(y) = 1$ .

- Tal como para as funções de distribuição marginais também se podem calcular as funções de distribuição condicionadas a partir das funções probabilidade condicionadas:

$F_{X|Y=y}(x) = \sum_{x_i \leq x} f_{X|Y=y}(x_i)$, $\forall x \in \Re$, ($y$ fixo)

e

$F_{Y|X=x}(y) = \sum_{y_j \leq y} f_{Y|X=x}(y_j)$, $\forall y \in \Re$, ($x$ fixo).

Independência de variáveis aleatórias e funções probabilidade condicionadas.
$f_{X|Y=y}(x) = f_X(x)$ se $f_Y(y) > 0$; $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$ se $f_X(x) > 0$.

**Exemplo 3.2 –** Retome-se o exemplo 3.1
Calcule $f_{X|Y=3}(1)$, $f_{X|Y=3}(2)$ e $f_{X|Y=3}(3)$.
Calcule $f_{Y|X=4}(4)$, $f_{Y|X=4}(5)$ , $f_{Y|X=4}(6)$

## 3.7.2 Variáveis aleatórias continuas

**Definição – Função densidade condicionada**

Seja $f_{XY}(x, y)$ a função densidade conjunta de $X$ e $Y$. A função densidade de $X$ condicionada por $Y = y$, com $f_Y(y) > 0$, é definida da seguinte maneira:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (y \text{ fixo}).$$

De forma análoga $f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$) $x$ fixo).

A função densidade condicionada verifica todas as propriedades de uma função densidade de uma variável aleatória unidimensional.

- As funções de distribuição condicionadas podem ser calculadas a partir das funções densidade condicionadas:

$$F_{X|Y=y}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y=y}(u)\,du \text{ ,}(\forall x \in \Re) \text{ ,} y \text{ fixo}$$

e

$$F_{Y|X=x}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X=x}(v)\,dv \text{ ,}(\forall y \in \Re) \text{ ,} x \text{ fixo}$$

- Note-se que $P(X \in A|Y = y) = \int_A \ f_{X|Y=y}(x)dx$

  Por exemplo $P(a < X < b|Y = y) = \int_a^b f_{X|Y=y}(x)dx$

- Note-se também que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)f_{X|Y=y}(x)$.

**Exemplo 3.3 –** Considere-se a função densidade da variável bidimensional $(X,Y)$ dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (12/7)\ (x^2 + xy) & \text{para } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{para outros } (x,y). \end{cases}$$

Calcule $f_{X|Y=y}(x)$ , $f_{Y|X=x}(y)$ *e* $P(1/3 < X < 2/3|Y = 1/3)$ .

## 3.8 Valores esperados de funções de variáveis aleatórias multivariadas

**Definição – Valor esperado de função de v.a. bidimensional**

Se $(X, Y)$ é uma variável aleatória bidimensional discreta com função probabilidade $f_{X,Y}$, e se $\psi$ é uma função de $(X, Y)$, a expressão

$$E\{\psi(X, Y)\} = \sum_{(x,y)\in D} \psi(x, y) f_{X,Y}(x, y)$$

$$E\{\psi(X, Y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y) f_{X,Y}(x, y) dxdy$$

é o valor esperado de $\psi(X, Y)$.

Tal como no caso unidimensional, tem de se verificar a condição de existência do valor esperado.

## 3.9 Valores esperados marginais

Note-se que a definição anterior aplica-se também ao caso em que $\psi(X,Y)=X$ e $\psi(X,Y)=Y$ e consequentemente

$E\{X\}=\sum_{(x,y)\in D} x f_{X,Y}(x,y)$ e $E\{Y\}=\sum_{(x,y)\in D} y f_{X,Y}(x,y)$

$E\{X\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x,y)dxdy$ e $E\{Y\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{X,Y}(x,y)dxdy$
se estes valores esperados existirem

## Teorema – Dois resultados importantes

**Valor esperado de uma soma de v.a. –** Se $(X,Y)$ for uma variável aleatória bidimensional e se existirem $E(X)$ e $E(Y)$, então,

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

- **Valor esperado de um produto de v.a. independentes –** Se $X$ e $Y$ forem variáveis aleatórias **independentes** e se existirem $E(X)$ e $E(Y)$, então,

$$E(XY)=E(X)\times E(Y).$$

**Exemplo 3.4 –** Seja $(X, Y)$ uma v.a. bidimensional discreta com função probabilidade dada por

| $X \setminus Y$ | 3 | 5 | $f_X(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.3 | 0.4 |
| 2 | 0.4 | 0.2 | 0.6 |
| $f_Y(y)$ | 0.5 | 0.5 | 1 |

Calcular $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$, $var(X) = \sigma_X^2$, $var(Y) = \sigma_Y^2$, $E(XY)$.

**Exemplo 3.5 –** Retome-se o exemplo 3.3,

$$f(x, y) = \frac{12}{7}(x^2 + xy) \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

Calcular $E(X)$, $E(Y)$ e $E(XY)$.

## 3.10 Momentos em relação à origem

- **Definição – Momentos de ordem *r*+*s* em relação à origem -** Seja $(X, Y)$ uma variável aleatória bidimensional. O valor esperado,

$$\mu'_{rs} = E(X^r Y^s),$$

define, se existir, um momento de ordem $r + s$ em relação à origem da v.a. $(X, Y)$.

- Caso discreto: $\mu'_{rs} = E(X^r Y^s) = \sum_{(x,y)\in D} x^r y^s f_{X,Y}(x, y)$
- Caso contínuo: $\mu'_{rs} = E(X^r Y^s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r y^s f_{X,Y}(x, y) dxdy$
- Momentos mais importantes: $r + s = 1 \rightarrow E(X)$ e $E(Y)$

  $r + s = 2 \rightarrow E(X^2)$, $E(Y^2)$ e $E(XY)$

# 3.11 Momentos em relação à media

**Definição – Momentos de ordem ($r + s$) em relação à média -** Seja $(X, Y)$ uma variável aleatória bidimensional. O valor esperado,

$$\mu_{rs} = E\{(X - \mu_X)^r (Y - \mu_Y)^s\},$$

define, se existir, um momento de ordem $r + s$ em relação à média da v.a. $(X, Y)$.
Caso discreto:

$$\mu_{rs} = E\{(X - \mu_X)^r (Y - \mu_Y)^s\} = \sum_{(x,y)\in D} (x - \mu_X)^r (y - \mu_Y)^s f_{X,Y}(x, y)$$

- Caso contínuo:

$$\mu_{rs} = E\{(X - \mu_X)^r (Y - \mu_Y)^s\}$$

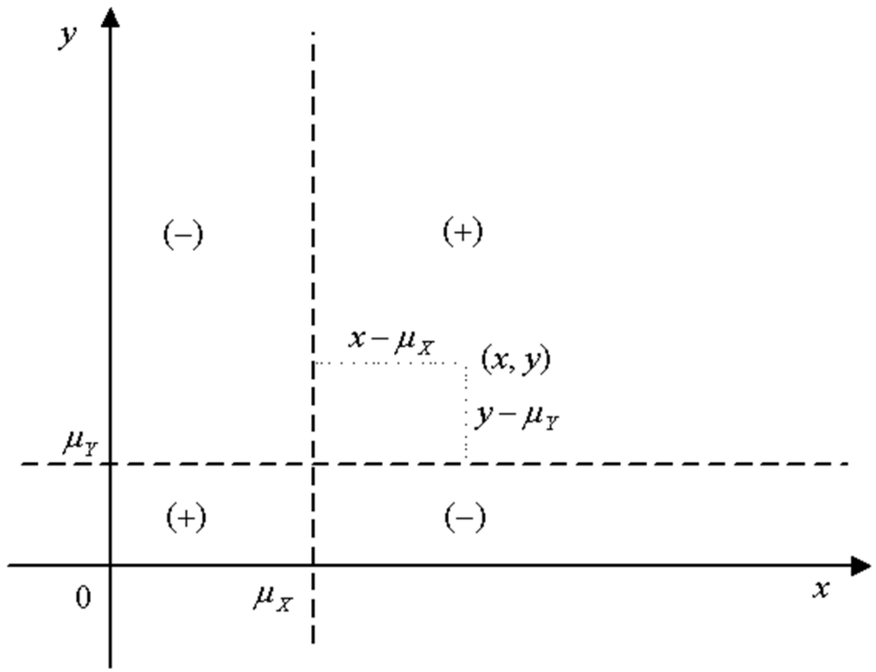
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^r (y - \mu_Y)^s f_{X,Y}(x, y)\, dxdy$$

- Momentos mais importantes:
  - $r + s = 1 \rightarrow$ sempre nulos
  - $r + s = 2 \rightarrow var(X)$, $var(Y)$ e $cov(X, Y)$

## 3.12 A covariância

**Definição– Covariância -** A covariância entre as variáveis aleatórias $X$ e $Y$ é, $\text{cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$, se este valor esperado existir.

Interpretação do conceito de covariância



$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)\, E(Y)$ Resultado importante

**Exemplos:** retomar os exemplos anteriores e calcular a covariância.

**Propriedades da covariância** ($a$ , $b$ , $c$ são 3 constantes arbitrárias e assumindo que os valores esperados existem)

- $\text{cov}(c, X) = E(cX) - E(c)\, E(X) = 0$
- $\text{cov}(aX, bY) = ab\,\text{cov}(X, Y)$
- Desigualdade de Cauchy–Schwarz: $\text{cov}(X,Y)^2 \leq \text{var}(X)\ \text{var}(Y)$

- Limitações do conceito de covariância na avaliação da associação entre v.a.:
  - Linearidade
  - Unidades de medida

## 3.13. O coeficiente de correlação

**Definição - Coeficiente de correlação**

- O coeficiente de correlação entre as variáveis aleatórias $X$ e $Y$ é dado por,

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

- Comentários:
  - Resolve o 2º problema
  - $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$. $\rho_{X,Y} = \pm 1$ quando e só quando existe relação linear entre as variáveis.
  - Se $X$ e $Y$ são independentes então $cov(X,Y) = 0$. **A recíproca não é verdadeira, isto é, covariância nula não implica independência**.

## 3.14 Momentos de funções lineares de variáveis aleatórias

- **Teorema –** Se existem segundos momentos para as v.a. $X$ e $Y$, então

$$\mathrm{var}(aX + bY) = a^2\mathrm{var}(X) + 2ab\,\mathrm{cov}(X, Y) + b^2\mathrm{var}(Y),$$

para quaisquer constantes a e b.

- Se a=b=1, $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + 2\mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{var}(Y)$,
- Se a=1 e b=-1, $\mathrm{var}(X - Y) = \mathrm{var}(X) - 2\mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{var}(Y)$,
- Se as variáveis são independentes,

$$\mathrm{var}(aX + bY) = a^2\mathrm{var}(X) + b^2\mathrm{var}(Y),$$

- A covariância é um conceito particularmente importante na construção de carteiras de ativos financeiros

- **Exemplo** – Considerem-se as v.a. $X$ e $Y$, com função probabilidade conjunta

| $X \setminus Y$ | $-1$ | 0 | 1 | $f_X(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 0.00 | 0.25 | 0.00 | 0.25 |
| 0 | 0.25 | 0.00 | 0.25 | 0.50 |
| 1 | 0.00 | 0.25 | 0.00 | 0.25 |
| $f_Y(y)$ | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 1.00 |

Mostrar que a covariância é nula mas que as variáveis aleatórias não são independentes.

# 15. Expectativas Condicionais

- A ideia é semelhante ao que se viu anteriormente, mas substituindo a f. probabilidade (densidade) pela função probabilidade (densidade) condicionada.

- **Definição** (expectativas condicionais ou valor esperado condicionado) – Seja a v.a. $Z = \psi(X, Y)$, função das variáveis aleatórias discretas $X$ e $Y$. O valor esperado de $Z = \psi(X, Y)$ condicionado por $X = x$, é definido por

$$E(Z|X = x) = E\{\psi(X, Y)|X = x\} = \sum_{y \in D_Y} \psi(x, y) f_{Y|X=x}(y),$$

se se verificar a condição habitual de existência do valor esperado.

- De modo análogo, $E(Z|Y = y) = E\{\psi(X, Y)|Y = y\} = \sum_{x \in D_X} \psi(x, y) f_{X|Y=y}(x)$.

- No caso contínuo substitui-se somatórios por integrais (e a função probabilidade condicionada pela função densidade condicionada)

**Caso particular mais interessante:**

- **Médias condicionais** $E(X|Y=y)=\mu_{X|Y}(y) \rightarrow \psi(X,Y)=X$ e $f_{X|Y=y}(x)$

  ou $E(Y|X=x)=\mu_{Y|X}(x) \rightarrow \psi(X,Y)=Y$ e $f_{Y|X=x}(y)$

**Definição - Independência em média**

A variável aleatória $Y$ é independente em média da variável aleatória $X$ se e só se,

$$E(Y|X=x)=E(Y) \text{ qualquer que seja } x.$$

A variável aleatória $X$ é independente em média da variável aleatória $Y$ se e só se,

$$E(X|Y=y)=E(X) \text{ qualquer que seja } y.$$

# 16. A lei das expectativas iteradas

- **A lei das expectativas iteradas (ou lei do valor esperado iterado) –** O valor esperado de $Z = \psi(X, Y)$, se existir, é igual ao valor esperado do seu valor esperado condicionado por $X$, isto é, $E(Z) = E_X[E_Z(Z|X)]$

- **Exemplo –** (função densidade do Exemplo 3.3)

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{12}{7}(x^2 + xy) \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

Calcular $E(X)$ diretamente e pela regra do valor esperado iterado.

## Definição – Variância condicionada

A variância de $Y$, condicionada por $X = x$, é definida por,

$$\text{var}(Y|X = x) = E\{\ [Y - E(Y|X = x)]^2|X = x\}$$

Caso discreto: $\text{var}(Y|X = x) = \sum_{y \in D_Y}[y - E(Y|X = x)]^2 f_{Y|X=x}(y)$

Caso contínuo: $\text{var}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty}[y - E(Y|X = x)]^2 f_{Y|X=x}(y)dy$

## Variância marginal e momentos condicionados

- **Teorema –** Se existe $E(Y^2)$ então, $\text{var}(Y) = \text{var}_X[E(Y|X)] + E_X[\text{Var}(Y|X)]$
- **Teorema** – A covariância de $X$ e $Y$ é igual à covariância de $X$ e o valor esperado de $Y$ condicionado por $X$, $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}[X, E(Y|X)]$.